

Angel L. Ruiz

***Estimación de una función producción
Cobb-Douglas para la Economía de Puerto Rico***

Angel L. Ruiz
Notas de Clase
Número 4
octubre 1982

***Estimación de una función producción Cobb-Douglas para
la Economía de Puerto Rico***

Angel L. Ruiz*

Introducción

La relación tecnológica que existe entre los insumos (capital, mano de obra, etc.) y la producción se denomina función-producción. Esta expresa la manera en que los insumos (bienes de producción) cooperan entre sí en el proceso productivo y son transformados en bienes finales (producción). La mencionada relación está

*. Catedrático Asociado en el Departamento de Economía de la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras.

Estimación de una función producción Cobb-Douglas...

determinada por la tecnología que existe en el período de tiempo dado.

La función producción tiene implícitas cuatro características que son altamente útiles para el análisis económico (Brown: 1968).

Estas se refieren a:

1. la eficiencia de la tecnología
2. el grado de economía de escala
3. el grado de intensidad de capital de la tecnología
4. la facilidad con que se puede substituir el capital por mano de obra (elasticidad de substitución)

La eficiencia de la tecnología considera la relación que existe entre los insumos y la producción. Si con los mismos insumos de mano de obra y capital la técnica A produce más unidades de producción que la técnica B se puede decir que A es más eficiente que B.

Las economías de escala tienen que ver con los rendimientos (constantes, crecientes o decrecientes) que se obtienen al aumentar los insumos, con una tecnología dada. Por ejemplo, si al aumentar en una determinada proporción los insumos la producción aumenta en una proporción mayor, podemos decir que la firma goza de rendimientos crecientes (o economías de escala). Si la producción aumenta en la misma proporción en que aumentaron los insumos se dice que los rendimientos de escala son constantes. Y si aumenta en una proporción menor, los rendimientos son decrecientes i.e. hay deseconomías de escala. Las economías de escala que se originan cuando hay rendimientos crecientes pueden dividirse en dos

categorías: las que surgen del desarrollo general de la industria y aquellas que dependen de los recursos de las firmas individuales que componen dicha industria. A las primeras se les denomina *economías externas* y a las segundas *economías internas*.

La intensidad de capital de una tecnología dada se refiere a la cantidad de este recurso relativo a la mano de obra que envuelve el uso de esa tecnología en el proceso de producción. Si determinada firma usa una tecnología cuya relación de capital a mano de obra es mayor que la de la tecnología empleada por una segunda firma, se dice que la primera opera con una tecnología más intensiva en capital que la segunda.

Por su parte, la elasticidad de sustitución mide el grado de facilidad con que el capital puede ser substituido por mano de obra.¹

La función de producción Cobb-Douglas

La función de producción más ampliamente usada es la llamada "Cobb-Douglas". Esta toma el nombre del profesor (y una vez senador) Douglas y el matemático C. W. Cobb (Cobb y Douglas: 1928). Si bien ésta fue sugerida mucho antes por P. Wicksteed (Wicksteed: 1894), fueron Cobb y Douglas quienes la desarrollaron e implementaron empíricamente. La misma se expresa matemáticamente como sigue:

$$1. \quad Q = AK^\beta L^\beta,$$

Una de las características básicas de esta función es que

1. Este concepto fue desarrollado por Sir John Hicks en su libro **The Theory of Wages** publicado en Londres en 1932 por Mac Millan y Co.

Estimación de una función producción Cobb-Douglas...

es homogénea de grado $a + \beta = 1$. La función matemática de tipo homogénea es muy conveniente desde el punto de vista metodológico y ampliamente usada en economía. Ilustraremos el concepto de homogeneidad con un ejemplo. Partamos de la siguiente función de dos variables:

$$2. \quad Q = f(K, L)$$

donde Q = producto bruto interno, K = capital y L = mano de obra. La función se dice que es homogénea de grado n si se mantiene la siguiente relación:

$$3. \quad f(hK, hL) = h^n (K, L)$$

O sea, una función es homogénea de grado n si al multiplicar cada uno de los factores de la producción (capital y trabajo) por una constante h la nueva función es h^n veces la función original. En nuestro caso, usando la función Cobb-Douglas el grado de homogeneidad es

$a + \beta$ ya que:

$$4. \quad f(hK, hL) = A (hK)^a (hL)^\beta = h^{(a+\beta)} A k^a L^\beta = h^{(a+\beta)} Q$$

Si $a + \beta = 1$ se dice que la función tiene rendimientos constantes de escala (la función es homogénea de grado 1). La función Cobb-Douglas es de este tipo. Por lo tanto, se puede expresar la producción por unidad de insumo como función de la razón matemática entre los dos insumos, capital y mano de obra. En forma de símbolos:

$$5. \quad q = A k^a \text{ donde } q = Q / L, \text{ y, } k = K / L$$

El incremento en la producción por unidad extra de insumo (producto marginal) se obtiene diferenciando matemáticamente la

$$\frac{\delta Q}{\delta K} = aAK^{a-1}L^\beta = a(Q/K)$$

ecuación 1 con respecto a cada uno de los factores de la producción. La productividad marginal del capital se obtiene mediante la siguiente ecuación:

6.

La elasticidad de la producción con respecto al capital (como responde la producción por unidad de aumento en el insumo de capital) está dada en la ecuación 6 por a y se asume productividad marginal decreciente del capital si a es menor de uno ($a < 1$).

La productividad marginal de la mano de obra esta dada por la

ecuación:
$$\frac{\delta Q}{\delta L} = \beta AK^a L^{\beta-1} = \beta(Q/L)$$

7.

La tasa marginal de sustitución entre el factor capital y la mano de obra se define como:

8. $R = \beta (Q / L) / a (Q / K) = (\beta / a) (K / L)$

En forma logarítmica, esta ecuación se puede expresar como:

8a. $\log R = \log (\beta / a) + \log (K / L)$

Nuestro próximo paso es derivar la elasticidad de sustitución entre el capital y la mano de obra (σ). Para ello se emplea la siguiente ecuación

9.
$$\sigma = \frac{d \log (k/L)}{d \log R} = 1$$

En este caso, la elasticidad de sustitución se mantiene constante ($= 1$), lo cual implica cambio tecnológico neutral (i.e. ni sesgado hacia el uso de mano de obra ni sesgado hacia el uso de capital).

Estimación de la función Cobb-Douglas para Puerto Rico

Metodología, modelo y fuentes de datos

La estimación de una función Cobb-Douglas requiere contar con series históricas de acervo de capital. Estas series no forman parte de la contabilidad social de Puerto Rico. Por lo tanto, usamos un estimado de acervo de capital agregado realizado por el Dr. Raul Azón (1975). De datos obtenidos de la Junta de Planificación se compilaron series de producto bruto interno privado no agrícola y series de promedio de horas-hombre trabajadas. Estas series se muestran en la tabla 1.

Se utilizó un modelo del tipo siguiente:

$$10. \quad Q = f (K, L, T)$$

donde

Q = producto bruto interno privado no agrícola,

K = acervo de capital

L = horas-hombres trabajadas y

T = cambio tecnológico

En base a las características de la Función Cobb-Douglas explicadas en la sección anterior, la ecuación 10 se re-escribió como sigue:

$$11. \quad Q = A (t) f (K, L)$$

$$12. \quad q = A (t) f (k, 1)$$

donde $q = Q / L$, $k = K / L$ y $A (t) =$ índice de cambio tecnológico. Para probar empíricamente la función se convirtió la misma a logaritmos y se probaron varias ecuaciones. La ecuación que representó los valores más apropiados (de acuerdo a las diferentes

$$\log \frac{Q/L}{A(t)} = -0.60371 + 0.53308 \log K/L$$

pruebas estadísticas) fue la siguiente:

13.

Tabla 1

Estimados de acervo de capital, Capital por hora-hombre, Producción por hora-hombre e Índice de cambio Tecnológico - Años Fiscales 1948-1974 (1954 = 100)

Año	Acervo Capital (millones de dólares)	Capital por Hora-hombre	Producción por Hora- hombre	Índice de cambio Tecnológico
1948	1350	1.9988	0.75	1.00000
1949	1395	2.1872	0.87	0.98319
1950	1443	2.1102	0.92	1.10549
1951	1496	2.0850	0.92	1.17772
1952	1580	2.3248	0.97	1.18287
1953	1638	2.5466	1.13	1.18891
1954	1704	2.8086	1.24	1.31374
1955	1779	2.8505	1.28	1.36889
1956	1882	2.7627	1.26	1.39502
1957	1987	2.9186	1.38	1.29202
1958	2116	3.1246	1.39	1.46524
1959	2283	3.3309	1.49	1.44638
1960	2433	3.5235	1.59	1.49257
1961	2597	3.4594	1.63	1.53713
1962	2812	3.9389	1.87	1.56954
1963	3062	4.3151	2.09	1.66270
1964	3308	4.2367	2.18	1.70309
1965	3652	4.4700	2.33	1.72626
1966	3747	4.0277	2.05	1.77393
1967	4401	4.8845	2.28	1.75189
1968	4838	5.1859	2.33	1.78324
1969	5293	5.2861	2.37	1.78324
1970	5728	5.6195	2.48	1.79344
1971	6291	6.0806	2.58	1.81777
1972	6862	6.3844	2.63	1.82936
1973	7478	6.6696	2.75	1.83073
1974	7981	7.3253	2.81	1.86025

Fuente de información: Fernando Zalacaín y Angel L. Ruiz, "La Medición de la Productividad Total en la Economía de Puerto Rico", Trabajo realizado para el Consejo Asesor del Gobernador sobre Política Laboral, Diciembre, 1976.

Esta función de tipo Cobb-Douglas es igual a la estimada por el profesor R. Solow (agosto 1957) para los Estados Unidos. Empleando la misma podemos determinar qué factores (capital, mano de obra y tecnología) son responsables del ritmo de aumento en el producto bruto interno privado no agrícola. Los resultados se

Estimación de una función producción Cobb-Douglas...

ofrecen en la siguiente sección.

Fuentes de crecimiento en la economía de Puerto Rico

Con los datos usados para estimar la función Cobb-Douglas (versión usada por el profesor Solow) podemos determinar, como antes se indicó, las fuentes de crecimiento en la economía de Puerto Rico. Dicho de otra forma, la contribución que ha hecho la tecnología, el factor mano de obra y el factor capital al crecimiento observado en el producto bruto privado no agrícola de la Isla. Este se deriva de las relaciones matemáticas descritas en las secciones anteriores, las que se expresan como sigue:

$$14. \quad \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta A}{A} + WL \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta L}{L}$$

En base a las características de la función producción Cobb-Douglas, antes descritas, podemos re-escribir la ecuación 14 como sigue:

$$14a. \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta A}{A} + WL \frac{\Delta K}{K}$$

donde

$$q = Q/L$$

$$k = K/L$$

W L = participación del valor añadido atribuible a la mano de obra

W K = participación del pago al factor capital en el valor añadido

A = cambio tecnológico

Tabla 2

Contribución de los Factores de Producción al Aumento del Producto Bruto:
Puerto Rico 1948-1974 (*en por ciento)

Angel L. Ruiz

Año	Contribución del Cambio Tecnológico	Contribución del factor trabajo	Contribución del factor capital	Tasa anual del crecimiento de producto bruto**
1948				6.3
1949	12.2	-3.9	1.3	9.6
1950	7.2	4.7	1.4	13.4
1951	0.5	2.8	1.6	4.9
1952	0.6	-2.8	2.4	0.2
1953	12.5	-2.3	1.5	9.3
1954	5.5	-3.0	1.7	3.6
1955	2.6	1.9	1.8	6.3
1956	-0.3	5.3	2.4	7.4
1957	7.3	-0.4	2.2	9.1
1958	-1.8	-0.2	2.4	1.8
1959	4.6	1.2	3.1	8.9
1960	4.5	0.4	2.6	7.4
1961	3.2	5.7	2.7	11.6
1962	9.3	-3.6	3.2	8.9
1963	8.0	-0.3	3.5	11.2
1964	-1.6	5.9	3.1	7.3
1965	4.7	2.9	4.0	11.7
1966	-2.2	8.6	1.0	7.4
1967	3.1	-2.1	6.6	7.6
1968	-0.09	1.8	3.7	5.5
1969	1.0	4.9	3.4	9.4
1970	2.4	1.4	2.9	6.7
1971	1.2	0.5	3.4	5.2
1972	0.1	2.5	3.3	6.3
1973	3.0	2.8	3.2	9.1
1974	-1.5	-2.0	2.5	-1.0

*En algunos casos existen pequeñas diferencias, lo cual es producto del redondeo.

**Las cifras de producto bruto han sido revisadas a partir del año de 1972, pero estos cambios no varían sustancialmente los resultados.

Los resultados se muestran en la tabla 2.

El examen de la tabla 2 permite apreciar cierta disminución en los ritmos de aumento de los insumos de tecnología y capital. Descontando las súbitas variaciones de 1966 y 1997, el ritmo del insumo de capital se ha mantenido aproximadamente constante desde mediados de los años sesenta, observándose un ligero descenso en

Estimación de una función producción Cobb-Douglas...

los últimos años analizados. En el caso de la tecnología se observa un continuo descenso. Estos factores han inducido una disminución en la tasa de crecimiento del producto bruto interno privado no agrícola.

En general, la contribución de la tecnología al aumento del producto bruto muestra, también, una reducción importante a partir de mediados de los años sesenta llegando a ser, en términos relativos, muy similar a la observada en países sub-desarrollados. Contradictoriamente, durante la década de 1954-64, cuando Puerto Rico tenía un nivel de desarrollo económico menor, la contribución de la tecnología al aumento de la producción era muy parecida a la de los países más desarrollados.

La contribución del capital al crecimiento de la producción en Puerto Rico aumentó significativamente durante los años de 1954 a 1974. Ello ha permitido que Puerto Rico se coloque, en términos relativos, a niveles comparables con Japón, México y la Unión Soviética, que son los países en donde el capital ha jugado el papel más importante en el crecimiento alcanzado en el período analizado.

La aportación de la mano de obra, i.e. horas-hombres trabajadas, al aumento de la producción ha sido, también, significativa, acentuándose esta contribución durante la década de 1964-74.

Referencias

Coob, C. W. y P.H. Douglas, (1928) "*A Theory of Production*",

Angel L. Ruiz

American Economic Review.

Wicksteed, P. (1894) "*Co-ordination of The Laws of Production*"
Economic Journal, junio.

Azón, Raúl (1975) "*Un Estimado de Acervo de Capital para Puerto Rico*"
Departamento de Hacienda.

Solow, Robert (1957) "*Technical Change and the Aggregate Production Function*",
Review of Economics and Statistics. agosto.

Murray Brown, (1968) "*On the Theory and Measurement of Technological Change*"
Cambridge University Press, England.