El Optimo del Consumidor

Jaime L. del Valle Caballero*

Nota: Las notas que se publican a continuación (# 5 y 6) son el producto de varios años de enseñanza de los cursos de **Fundamentos Matemáticos de la Economía** a nivel subgraduado y el de **Teoría Económica I (Microeconomía)** del programa graduado. Los mismos se originaron como unas guías sencillas de algunos de los planteamientos formales, matemáticos y teóricos, que se discuten en estos cursos. Con ellos no se pretende cubrir todos los argumentos ni todas las posibles vías de análisis de los temas que aquí se plantean. Incluso se han incluido temas que son del interés particular de este autor y que no necesariamente son compartidos por los demás compañeros profesores. Presento aquí estas notas con el simple propósito de ayudar al estudiante a entender mejor la interacción entre el lenguaje de las matemáticas y las implicaciones teóricas que este lenguaje tiene sobre la economía.

Como el propósito de estas notas es ayudar al estudiante en su comprensión de los fenómenos económicos, agradeceré me hagan llegar sus comentarios, críticas y sugerencias para continuar mejorando estas notas,comenzar otras, o incluso desistir de mis intenciones...

Finalmente, les alerto (¿advierto?) contra el uso indebido de las matemáticas en la economía. Parafraseando a la distinguida economista inglesa Joan Robinson durante un debate sobre la función de producción y la teoría del capital con los profesores Paul Samuelson y Robert Solow en la Universidad de MIT en Boston, "*yo, como no sé matemáticas, me veo forzado a pensar...*"

Para comenzar nuestro análisis del óptimo del consumidor comencemos planteando como ejemplo la siguiente función de utilidad:

$u=xy + 2x$ para $B=60$, $p_x=4$ y $p_y=2$, en donde $60=4x + 2y$ (1)

Por el método de sustitución, resolvemos por $\boldsymbol{y}$ la ecuación para la restricción presupuestaria:
$\boldsymbol{y} = 30 - 2\boldsymbol{x}$ y sustituimos el resultado en la función objetivo de utilidad
$\boldsymbol{u} = (30 - 2\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} = 30\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} = 32\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^2$

Optimizando "libremente":

$$\frac{du}{dx} = 32 - 4x = 0$$

$$\bar{x} = 8$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -4$$

Métodos de los 'multiplicadores de Lagrange' - λ -

---

*. Catedrático Asociado en el Departamento de Economía de la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras. Dirección electrónica: jdelvall@upracd.upr.clu.edu

El método de los multiplicadores de Lagrange transforma una función u=(x, y), sujeta a una restricción c=g(x, y), en una función L=L(x, y, λ) donde u ≡ L. De esta forma podemos re-escribir la ecuación (1) de arriba de la siguiente forma:

$$L = xy + 2x + \lambda(60 - 4x - 2y) \qquad (2)$$

Nótese que si satisfacemos nuestra restricción ∴ 60 - 4x - 2y = 0, ***independientemente*** del valor que asuma el *multiplicador lagrangiano* λ, entonces u ≡ L.

Una vez expresada la función lagrangiana, para optimizar nuestra función objetivo inicial, optimizamos libremente la función lagrangiana de ***tres*** variables: *x*, *y* y λ:

$$L_\lambda = 60 - 4x - 2y = 0$$

$$L_x = y + 2 - 4\lambda = 0$$

$$L_y = x - 2\lambda = 0$$

Siguiendo la metodología de óptimos libres, buscamos los valores críticos para las tres variables. En términos generales, escribimos, para una función de dos variables y una restricción de igualdad: y = f(x, y) s.t. c = g(x, y) → L = f(x, y) + λ(c - g(x, y))

$$L_\lambda = c - g(x, y) = 0$$

$$L_x = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0$$

$$L_y = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0$$

Observamos que al satisfacer la condición de primer órden, la primera ecuación del sistema de ecuaciones superior satisface la restricción de igualdad. Esta condición nos dá como resultado los valores estacionarios de *x*, *y* y λ que optimizan la función, *para un valor exógeno* de *c* - la constante en la restricción -. De esta forma podemos escribir:

$$\bar{L} = f(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\lambda}(c - g(\bar{x}, \bar{y}))$$

Donde la barra sobre las variables indica los estacionarios de la función.
Derivando con respecto a la constante de la restricción - c -:

$$\frac{d\overline{L}}{dc} = f_x \frac{d\overline{x}}{dc} + f_y \frac{d\overline{y}}{dc} + \left(c - g(\overline{x}, \overline{y})\right) \frac{d\overline{\lambda}}{dc} + \overline{\lambda}\left(1 - g_x \frac{d\overline{x}}{dc} - g_y \frac{d\overline{y}}{dc}\right)$$

$$= (f_x - \lambda g_x) \frac{d\overline{x}}{dc} + (f_y - \lambda g_y) \frac{d\overline{y}}{dc} + \left(c - g(\overline{x}, \overline{y})\right) \frac{d\overline{\lambda}}{dc} + \overline{\lambda}$$

Por las condiciones necesarias de primer órden $(f_{x_i} - \lambda g_{x_i}) = 0$ y $(f_{y_i} - \lambda g_{y_i}) = 0$,

y dado que en el óptimo se satisface la restricción $(c - g(x, y)) = 0 \quad \therefore \quad \frac{d\overline{L}}{dc} = \overline{\lambda}$.

Podemos interpretar el multiplicador lagrangiano λ como la medida de sensitividad de la función ante la restricción.

Condiciones de segundo órden

Derivando parcialmente las ecuaciones que resultan de las condiciones de primer órden, con respecto a las tres variables analíticas, es decir tomando las segundas derivadas, escribimos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} = g_{\lambda x}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} = g_{\lambda y}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} = g_{\lambda x}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = L_{xx} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = L_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} = g_{\lambda y}(x, y) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{yx} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = L_{yy}$$

Con estas segundas derivadas parciales, podemos escribir el ***hessiano orlado*** ($\bar{H}$) como:[1]

$$\left|\bar{H}\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

Para funciones cuadráticas de dos variables y una restricción las condiciones suficientes de segundo órden son:

para un máximo: $\left|\bar{H}\right| > 0$

para un mínimo: $\left|\bar{H}\right| < 0$

<u>Ejemplos Económicos</u>

Consideremos una función de utilidad, en su expresión general U = u(x, y) sujeta a una restricción presupuestaria $B = p_x x + p_y y$. Con estas funciones podemos escribir la función Lagrangiana:
$L = u(x, y) + \lambda(B - p_x x - p_y y)$. Obtenemos las condiciones necesarias de primer órden:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = B - p_x x - p_y y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = u_x - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = u_y - \lambda p_y = 0$$

De la segunda y tercera ecuación del sistema de ecuaciones anterior tenemos $\lambda = \frac{u_x}{p_x} = \frac{u_y}{p_y}$. Esto es, una condición necesaria para optimizar la conducta del

1. Notar que el Hessiano orlado es igual al Jacobiano, con la primera fila y columna multiplicada por -1. Por propiedad de determinantes de matrices simétricas, el valor del determinante no se ve afectado por esta multiplicación, de esta forma $\left|J\right| = \left|\bar{H}\right|$

consumidor es satisfacer el principio de ***equimarginalidad***, y λ lo podemos interpretar como la 'utilidad marginal del dinero'.

En cuanto a la curva de indiferencia, podemos diferenciar totalmente la función de utilidad para obtener:

$$dU = u_x dx + u_y dy \equiv 0$$

por lo cual, rearreglando los términos observamos que $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$; la pendiente de la curva de indiferencia es igual a la relación de las utilidades marginales de ***x*** y ***y***. A esta relación se le conoce en la teoría económica como la ***tasa marginal de sustitución de x por y***. Como podemos observar, esta pendiente es negativa y no lineal (por el supuesto de utilidad marginal decreciente).

Con respecto a la curva de presupuesto tenemos que, resolviendo para y, obtenemos

$$y = \frac{B}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x$$

donde $-\frac{p_x}{p_y}$ representa la pendiente de la restricción presupuestaria.

Cosiderando curvas de indiferencia estrictamente convexas y dada la linealidad de la restricción presupuestaria, para maximizar la función de utilidad sujeto a la restricción presupuestaria es necesario encontrar la ***tangencia*** entre la curva de indiferencia y la frontera presupuestaria. Esto es, $-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{u_x}{u_y}$. Como podemos notar, esta condición no es más que otra forma de expresar el principio de equimarginalidad señalado anteriormente.

Continuando el procedimiento de maximización, sacamos las segundas derivadas y construimos nuestro hessiano orlado

$$\left| \overline{H} \right| = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & u_{xx} & u_{xy} \\ p_y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

el cual es igual a $2p_x p_y u_{xy} - p_x^2 u_{yy} - p_y^2 u_{xx}$ (dado que por el Teorema de Young, las derivadas parciales cruzadas son iguales), que, como condición para un máximo tiene que ser positivo. De esta manera, este resultado requiere que u_{yy} y u_{xx} sean ambos <0 (lo cual se satisface por la ley de utilidad marginal *decreciente*) y u_{xy}>0. Nótese que este último requisito es uno bastante razonable y refleja el axioma de no-saciedad de la teoría del consumidor.

Continuando con el ejemplo de la primera página, habíamos visto que :

$$L_\lambda = 60 - 4x - 2y = 0$$

$$L_x = y + 2 - 4\lambda = 0$$

$$L_y = x - 2\lambda = 0$$

Resolviendo para los valores críticos de x y y obtenemos $\bar{x} = 8$; $\bar{y} = 14$. El valor de λ no nos preocupa, pues en el óptimo este valor es el coeficiente de 0. Calculando las segundas derivadas, podemos escribir el hessiano de la siguiente manera:

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

De esta forma podemos confirmar que los valores críticos anteriormente obtenidos **maximizan** la función.

Derivación de la curva de demanda: un ejemplo

Tomemos la siguiente función: $u = x^\alpha y^\beta$ junto con $p_x x + p_y y = m$. Sabemos que en el óptimo $\frac{p_x}{p_y} = \frac{u_x}{u_y}$ por lo que $\frac{\alpha \frac{u}{x}}{\beta \frac{u}{y}} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x}$. Resolviendo la restricción presupuestaria por y, luego de varias sustituciones simples podemos obtener los siguientes resultados:

$$\frac{\alpha\left[\dfrac{m}{p_y} - \dfrac{p_x}{p_y}x\right]}{\beta\, x} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\alpha\, m - \alpha\, p_x x = \beta\, p_x x$$

$$x = \frac{\alpha\, m}{\alpha + \beta}\,\frac{1}{p_x}$$

De esta forma podemos apreciar la relación inversa, no-lineal entre el precio de *x* y sus cantidades demandadas. Nótese además que:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -\left(\frac{\alpha\, m}{\alpha + \beta}\right) p^{-2} < 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial m} = \left(\frac{\alpha\, p^{-1}}{\alpha + \beta}\right) > 0$$

<u>Análisis de los Efectos Ingreso y Sustitución</u>

A. Modelo matricial

Comenzando con las condiciones necesarias de primer órden, esto es enmarcando nuestro análisis dentro del supuesto de la conducta optimizadora del consumidor, diferenciamos totalmente las ecuaciones y escribimos:

$$dB = dx\, p_x + x\, dp_x + dy\, p_y + y\, dp_y$$

$$0 = u_{xx}\, dx + u_{xy}\, dy - \lambda\, dp_x - p_x\, d\lambda$$

$$0 = u_{yx}\, dx + u_{yy}\, dy - \lambda\, dp_y - p_y\, d\lambda$$

Si rearreglamos estas ecuaciones en términos de coeficientes, variables y constantes, tenemos entonces:

$$0\, d\lambda \; - \; p_x\, dx \; - \; p_y\, dy \; = \; (\, -dB \; + \; x\, dp_x \; + \; y\, dp_y \,)$$

$$-p_x\, d\lambda \; + \; u_{xx}\, dx \; + \; u_{xy}\, dy \; = \; \lambda\, dp_x$$

$$-p_y\, d\lambda \; + \; u_{yx}\, dx \; + \; u_{yy}\, dy \; = \; \lambda\, dp_y$$

En álgebra matricial podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & u_{xx} & u_{xy} \\ -p_y & u_{yx} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dB + x\, dp_x + y\, dp_y \\ \lambda\, dp_x \\ \lambda\, dp_y \end{bmatrix}$$

Consideremos primero un cambio en presupuesto, manteniendo los precios relativos constantes y evaluemos el efecto de este cambio en la combinación óptima de la canasta de consumo del consumidor.

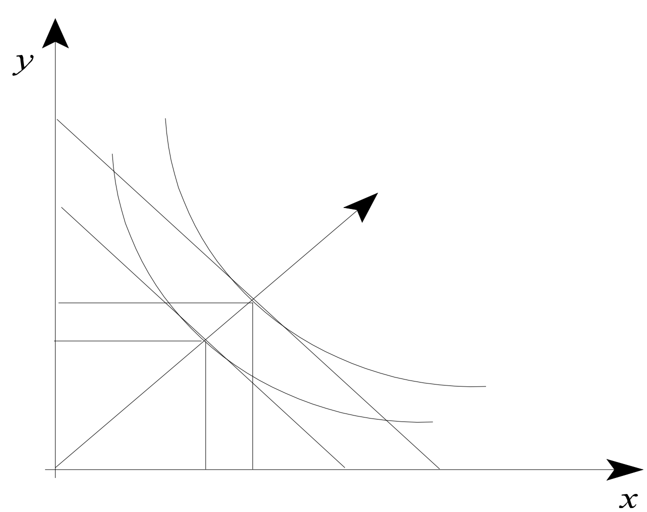
$$\begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & u_{xx} & u_{xy} \\ -p_y & u_{yx} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{d\lambda}{dB} \\ \dfrac{dx}{dB} \\ \dfrac{dy}{dB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo usando la regla de Cramer para los valores de $\frac{\partial x}{\partial B}$ y $\frac{\partial y}{\partial B}$ tenemos:

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} -p_x & u_{xy} \\ -p_y & u_{yy} \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial y}{\partial B} = \frac{-1}{|J|}\begin{vmatrix} -p_x & u_{xx} \\ -p_y & u_{yx} \end{vmatrix}$$

Acordándonos que la condición suficiente para un máximo es que el hessiano sea positivo, entonces $\frac{\partial x}{\partial B}$ estará dado por las magnitudes relativas de las utilidades marginales. De todas formas podemos establecer que si $\frac{\partial x}{\partial B} > 0$ entonces ***x*** es un bien normal, mientras que si es menor que cero, lo clasificamos como un bien inferior.

Gráfica 1



Pasemos ahora a considerar el efecto de un cambio en los precios relativos; en específico un cambio en el precio de x. En este caso, tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & u_{xx} & u_{xy} \\ -p_y & u_{yx} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{d\lambda}{dp_x} \\ \dfrac{dx}{dp_x} \\ \dfrac{dy}{dp_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo nuevamente por Cramer para los valores de x y y:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{-x}{|J|} \begin{vmatrix} -p_x & u_{xy} \\ -p_y & u_{yy} \end{vmatrix} + \frac{\lambda}{|J|} \begin{vmatrix} 0 & -p_y \\ -p_y & u_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{x}{|J|} \begin{vmatrix} -p_x & u_{xx} \\ -p_y & u_{yx} \end{vmatrix} - \frac{\lambda}{|J|} \begin{vmatrix} 0 & -p_x \\ -p_y & u_{yx} \end{vmatrix}$$

Si comparamos $\frac{\partial x}{\partial p_x}$ con $\frac{\partial x}{\partial B}$ notamos que el primer término de la primera ecuación arriba se puede escribir como $\frac{\partial x}{\partial B} \cdot -x$. Considerando que el cambio en las cantidades consumidas de x son un reflejo del **poder adquisitivo**, entonces $-x = \frac{\partial B}{\partial p_x}$. **Compensando**[2] para la reducción en consumo por concepto de un aumento en precio, que

2. ***Compensar*** implica no permitir cambios en las cantidades de *x* a través del efecto del cambio en el ***ingreso real*** (i.e. $\bar{x} = -\frac{\partial B}{\partial p_x} = 0$).

se manifiesta a través del poder adquisitivo, tendríamos que reescribir el sistema de ecuaciones inicial, pero eliminando cualquier efecto sobre las cantidades de x, directo e indirecto, proveniente de una variable de ingreso (como lo es el poder adquisitivo). Considerando, como habíamos establecido anteriormente, que $-x = \frac{\partial B}{\partial p_x}$, entonces si cualquier dB =0, $x dp_x = 0$. De esta manera, escribiríamos el sistema de ecuaciones 'compensadas' de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & u_{xx} & u_{xy} \\ -p_y & u_{yx} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\lambda}{dp_x} \\ \frac{dx}{dp_x} \\ \frac{dy}{dp_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

De este sistema de ecuaciones observamos que $\left(\frac{\partial x}{\partial p_x}\right)_{compensada} = \frac{-\lambda\, p_y^2}{|J|}$

Utilizando este resultado, en nuestro resultado inicial del efecto de un cambio en el precio de x sobre el consumo de x, podemos escribir: $\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial B} \cdot -x + \left(\frac{\partial x}{\partial p_x}\right)_{compensada}$

Al primer término de la expresión de mano derecha le llamamos el ***efecto ingreso*** y al segundo término le llamamos el ***efecto sustitución***.

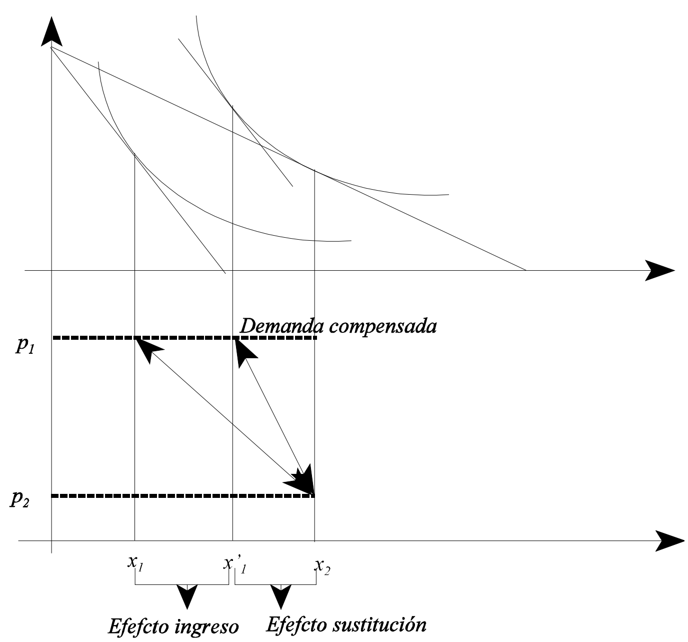
B. Ecuación de Slutsky

Derivemos ahora los efectos ingreso y sustitución, por medio de lo que se conoce como la *Ecuación de Slutsky*. Comencemos por definir la demanda por el bien *x* en función de los precios de *x*, *y* y el ingreso: $x = d_x(p_x, p_y, I)$. Por su parte podemos definr la demanda *compensada* en función de de los precios de *x*, *y* y un nivel de utilidad dado: $x_c = h_x(p_x, p_y, U)$. Finalmente debemos plantear la función de gasto como el gasto mínimo necesario para lograr un cierto nivel de utilidad dado los precios relativos: $E_x = E(p_x, p_y, U)$.

Con estas funciones podemos escribir: $h_x(p_x, p_y, U) = d_x(p_x, p_y, E(p_x, p_y, U))$ por lo que, derivando obtenemos $\frac{\partial h_x}{\partial p_x} = \frac{\partial d_x}{\partial p_x} + \frac{\partial d_x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x}$ Rearreglando podemos escribir: $\frac{\partial d_x}{\partial p_x} = \frac{\partial h_x}{\partial p_x} - \frac{\partial d_x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x}$ Esta ecuación es la que se conoce como la ***ecuación de Slutsky***. Podemos ver entonces que la expresión a mano izquierda de la ecuación anterior representa la función de demanda del bien *x*, mientras que la expresión a mano derecha cuenta con dos términos: el primero $\frac{\partial h_x}{\partial p_x}$ es la pendiente de la función de demanda compensada, y por lo tanto se interpreta como el **efecto sustitución**. La segunda expresión de mano derecha $\frac{\partial d_x}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_x}$ muestra cómo los cambios en el precio de *x* afectan sus cantidades demandadas a través de cambios en el gasto mínimo. Este componente se interpreta como el **efecto ingreso**.

Gráfica 2

Demanda y demanda compensada



Un ejemplo numérico por el método matricial

Regresemos al ejemplo numérico del comienzo de estas notas. En aquel caso teníamos:

$$U = xy + 2x$$

$$s.t\ 60 = 4p_x + 2p_y$$

donde $\bar{x} = 8,\ \bar{y} = 14\ y\ \bar{\lambda} = 4.$

Asumamos ahora que el precio del bien ***x*** aumenta a \$5.00. Podemos calcular los efectos ingreso y sustitución, y el cambio total en ***x*** partiendo del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dB + 8\,dp_x + 14\,dp_y \\ 4\,dp_x \\ 4\,dp_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\lambda}{dp_x} \\ \frac{dx}{dp_x} \\ \frac{dy}{dp_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del cual podemos resolver:

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{-8}{|\,20\,|} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \frac{4}{|\,20\,|} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{16}{20} + \frac{-16}{20} = \frac{-32}{20}$$

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -1.6$$

Nótese que ahora el valor del jacobiano incorpora el nuevo precio del bien $\boldsymbol{x}$, y se ha sustituido este nuevo precio en los subdeterminantes de la ecuación. De esta manera, si antes las cantidades óptimas de $\boldsymbol{x}$ eran 8, ahora serán 6.4 (8 - 1.6). De las 1.6 unidades de cambio, 0.8 pueden ser explicadas por el efecto ingreso, mientras que las restantes 0.8 son explicadas por el efecto sustitución.

Por su parte, notamos que las cantidades óptimas del bien $\boldsymbol{y}$ cuando cambia el precio de $\boldsymbol{x}$:

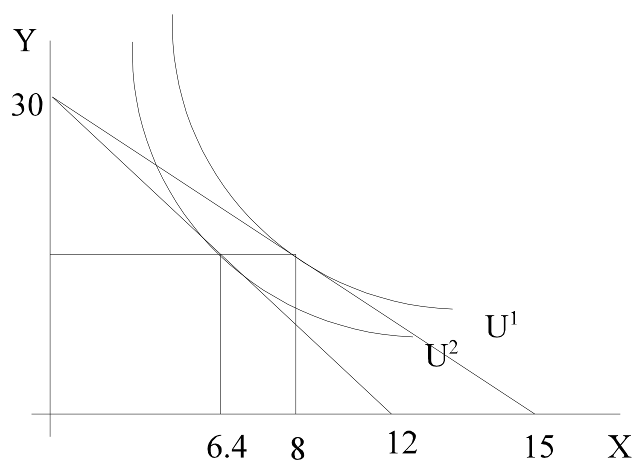
$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{8}{|\,20\,|}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{4}{|\,20\,|}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{-10}{5} + \frac{10}{5} = 0$$

Se pueden verificar estos resultados en el sistema inicial de ecuaciones, a través del lagrangiano: $L = xy + 2x + \lambda\,(60 - 5p_x - 2p_y)$. (Verifique este resultado)

Gráficamente, este cambio en el óptimo lo podemos representar de la siguiente manera:

Gráfica 3
Cambios en el óptimo del consumidor



Bibliografía

Chiang, Alpha [1987] **Méétodos Fundamentales de Economía Matemática**, McGraw-Hill, 3era Edición

Deaton, Angus & J. Muellbauer [1989] **Economics and Consumer Behaviour**, Cambridge University Press

Gravelle H. & R. Rees [1984] **Microeconomics**, Longman, London

Kreps, David M. [1990] **A Course in Microeconomics Theory**, Harvester Wheatsheaf, New York

Lancaster, K. **Consumer Demand: A New Approach**, Columbia University Press, 1971

Nicholson, Walter [1998] **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**, Dryden Press, New York

Varian, Hal [1996] **Intermediate Microeconomics** (4th Edition) W.W. Norton & Co., New York

Varian, Hal [1992] **Microeconomic Analysis** (3rd Edition) W.W. Norton & Co., New York