Funciones de Producción

Jaime L.del Valle Caballero*

Nota:

Las notas que se publican a continuación (# 5 y 6) son el producto de varios años de enseñanza de los cursos de **Fundamentos Matemáticos de la Economía** a nivel subgraduado y el de **Teoría Económica I (Microeconomía)** del programa graduado. Los mismos se originaron como unas guías sencillas de algunos de los planteamientos formales, matemáticos y teóricos, que se discuten en estos cursos. Con ellos no se pretende cubrir todos los argumentos ni todas las posibles vías de análisis de los temas que aquí se plantean. Incluso se han incluido temas que son del interés particular de este autor y que no necesariamente son compartidos por los demás compañeros profesores. Presento aquí estas notas con el simple propósito de ayudar al estudiante a entender mejor la interacción entre el lenguaje de las matemáticas y las implicaciones teóricas que este lenguaje tiene sobre la economía.

Como el propósito de estas notas es ayudar al estudiante en su comprensión de los fenómenos económicos, agradeceré me hagan llegar sus comentarios, críticas y sugerencias para continuar mejorando estas notas, comenzar otras, o incluso desistir de mis intenciones...

Finalmente, les alerto (¿advierto?) contra el uso indebido de las matemáticas en la economía. Parafraseando a la distinguida economista inglesa Joan Robinson durante un debate sobre la función de producción y la teoría del capital con los profesores Paul Samuelson y Robert Solow en la Universidad de MIT en Boston, "*yo, como no sé matemáticas, me veo forzado a pensar...*"

Funciones de producción

El concepto ***función de producción*** es el concepto central en el análisis económico de los procesos de producción. El mismo representa la relación funcional entre los insumos y los niveles de producción. En términos generales escribimos la función de producción como Q=F(K, L, T, E), donde Q representa los niveles de producción, K, L T y E son los insumos necesarios (en este caso capital, trabajo, tierra y el recurso empresarial).

Dentro de la teoría económica neoclásica, la función de producción más utilizada es la función de producción Cobb-Douglas que tiene la forma $Q= AK^{\alpha}L^{\beta}$ donde A es una constante de tecnología y $\alpha + \beta = 1$.

---

*. Catedrático Asociado en el Departamento de Economía de la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras. Dirección electrónica: jdelvall@upracd.upr.clu.edu

Homogeneidad de la función de producción

Una función es homogénea de grado ***n*** si, cuando multiplicamos cada una de las variables de la función, por una constante -digamos λ- el valor de la función se altera por la proporción λ^n.
Ejemplo:
La función z = f (x, y) es homogénea de grado *n* si f (jx, jy) = j^n f (x, y) = $j^n z$.

(i)	z = xy	→	jx jy = j^2 (xy) = $j^2 z$	∴	homogénea de grado 2
(ii)	$z = \frac{x}{y}$	→	$\frac{jx}{jy} = j\,x\,j^{-1}\,y^{-1} = j^0\,\frac{x}{y} = j^0\,z$		homogénea de grado 0
(iii)	z = x + y	→	jx + jy = j (x + y) = jz		homogénea de grado 1

Con respecto a la función de producción (acordándonos que A es una ***constante de tecnología***):

$$Q = A\,K^{\alpha}\,L^{\beta}$$

$$A\,(jK)^{\alpha}\,(jL)^{\beta} = j^{\alpha+\beta}\,A\,K^{\alpha}\,L^{\beta}$$

$$= j^{\alpha+\beta}\,Q$$

Si α + ß	= 1	: homogénea de grado 1	:	rendimientos constantes de escala
	> 1	: homogénea de grado n>1	:	rendimientos crecientes de escala
	< 1	: homogénea de grado n<1	:	rendimientos decrecientes de escala

Dado que en el caso de la función de producción Cobb-Douglas α+ß=1 ∴ la función de producción Cobb-Douglas es una función con rendimientos constantes de escala.

Productividades marginales

Para $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (N.B. dado que α+ß=1 ∴ ß=1-α) tenemos:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha\,A\,K^{\alpha-1}\,L^{1-\alpha} = \alpha\,A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = \alpha\,\frac{Q}{K}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-\alpha)\,A\,K^{\alpha}\,L^{-\alpha} = (1-\alpha)\,A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = \beta\,\frac{Q}{L}$$

De esta manera, para las funciones de producción de rendimientos constantes de escala, las productividades marginales pueden ser explicadas en términos de la relación capital-trabajo

$\left(\frac{K}{L}\right)$. Estas productividades marginales son funciones homogéneas de grado cero, por lo cual cambios proporcionales en K y L no afectan la relación capital-trabajo, ni la productividad marginal de la función de producción. En términos de la discusión del progreso tecnológico, esta propiedad de la función de producción se conoce como progreso tecnológico ***Hicks-neutral***. Nótese que la última expresión a mano derecha de las ecuaciones anteriores aplica para todo tipo de rendimiento de escala.

Finalmente debemos mencionar que el único requisito que se le debe imponer a esta función de producción es que $\alpha > 0$, para que las productividades marginales sean positivas.

Rendimientos marginales

Analicemos ahora el comportamiento de las productividades marginales. La teoría económica nos dice que las productividades marginales deberán ser positivas y decrecientes, esto último por virtud de la *ley de rendimientos marginales decrecientes*. De esta manera observamos que las segundas derivadas de la función de producción (primera derivada de la función de productividad marginal) son:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = (\alpha^2 - \alpha) A K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} = (\alpha^2 - \alpha) \frac{Q}{K^2}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\alpha (1 - \alpha) A K^{\alpha} L^{(1-\alpha-1)-1} = (\alpha^2 - \alpha) \frac{Q}{L^2}$$

Es fácil verificar que este resultado es independiente de los rendimientos de escala de la función de producción. No obstante, para que estas derivadas sean *negativas* es un requisito necesario que tanto α como β (en el caso de la Cobb-Douglas generalizada) sean menores que uno.

Por lo tanto, combinando los requisitos que surgen del análisis de las productividades marginales con el del comportamiento esperado de sus rendimientos, podemos establecer finalmente el requisito analítico, que para una función de producción Cobb-Douglas $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, es necesario que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Isocuantas de producción

Partiendo de la función de producción Cobb-Douglas podemos escribir:

$$K = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Esta ecuación puede ser utilizada como la ecuación de la isocuanta de producción para Q = $\bar{Q}$. Como podemos observar esta función nunca es igual a cero (nunca toca los ejes); para cada variable, cuando el valor de una variable se acerca a infinito, la otra se acerca, pero nunca es igual, a cero y viceversa. De esta forma hemos verificado que las isocuantas de producción son asintóticas a los ejes, independientemente del nivel de producción Q.

Diferenciando totalmente la función de producción y recordando que en una *isocuanta* los niveles de producción no cambian:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0$$

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}$$

En el caso de la Cobb-Douglas generalizada podemos escribir $\frac{dK}{dL} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$.

Este resultado muestra que la pendiente de la isocuanta de producción de una función de producción Cobb-Douglas es negativa, constante y proporcional a la utilización de insumos, ***independientemente*** de los niveles de producción.

Si recordamos que una relación capital-trabajo constante se puede medir por un rayo que pase por el origen en un plano cartesiano (L,K), y dado que acabamos de ver que la pendiente de la isocuanta de producción es proporcional a la utilización de insumos (L,K), ***independiente*** de los niveles de producción, esto implica que estas funciones de producción son ***homotéticas***.

Teorema de Euler y la distribución de los ingresos

Si Q=f(K, L) es linealmente homogénea (homogénea de grado 1) ∴ $Q = \frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} L$

Es decir que, si a cada insumo se le paga el valor de su productividad marginal, el valor del producto total será agotado entre estos. Utilizando esta condición como supuesto de análisis, podemos escribir la ecuación de Euler como $Q = rK + wL$ donde ***r*** y ***w*** representan la tasa de interés y el salario que se le paga a los recursos capital y trabajo respectivamente y que son iguales a las productividades marginales de los mismos.

Haciendo uso de este teorema de Euler y teniendo en cuenta la homegeneidad de la función de producción, podemos ver también que, dividiendo en ambos lados de la ecuación por Q:

$$\frac{Q}{Q} = 1 = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K} + \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L} = \epsilon_K + \epsilon_L$$

$$= \frac{K}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} \cdot \frac{\alpha AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{K} + \frac{L}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} \cdot \frac{(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L}$$

$$= \alpha + (1 - \alpha)$$

donde ϵ_K y ϵ_L representan las elasticidades de producción o escala. Dado que $\epsilon_K + \epsilon_L = 1$, decimos que esta función tiene rendimientos constantes de escala.

Funciones de demanda de los insumos y funciones de costos

Para una función de producción Cobb-Douglas $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ sabemos que una condición del óptimo es que $\frac{w}{r} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L}$, por lo cual se puede observar que:

$$K = \frac{w}{r} \cdot \frac{\alpha}{\beta} L$$

$$L = \frac{r}{w} \cdot \frac{\beta}{\alpha} K$$

Sustituyendo estos resultados en la función de producción inicial tenemos:

$$Q = A\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}L\right]^{\alpha} L^{\beta} = A\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}\right]^{\alpha} L^{\alpha+\beta}$$

$$Q = AK^{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}K\right]^{\beta} = A\left[\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right]^{\beta} K^{\alpha+\beta}$$

Resolviendo para las variables, obtenemos los siguientes resultados

$$L = \left[\frac{Q}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \left[\frac{Q}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$K = \left[\frac{Q}{A}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \left[\frac{Q}{A}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Nótese que estas ecuaciones muestran la relación entre las cantidades demandadas de los recursos productivos (L y K) en función de los niveles de producción (Q) y los precios relativos $\left(\frac{w}{r}\right)$. De esta forma podemos obtener las ecuaciones de demanda:

$$\frac{dL}{dQ} = \frac{1}{\alpha+\beta} Q^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} \left[\frac{1}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$\frac{dK}{dQ} = \frac{1}{\alpha+\beta} Q^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} \left[\frac{1}{A}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Re-escribiendo la función de costos totales en términos de los niveles de producción Q:

$$C = wL + rK$$

$$= w\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + r\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \left[\left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} w^{\frac{\beta}{\epsilon}} r^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\left(\frac{\beta}{\alpha}^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\ \frac{\alpha}{\beta}^{\frac{\beta}{\epsilon}}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} w^{\frac{\beta}{\epsilon}} r^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\frac{\epsilon}{\beta}$$

Por lo tanto la función de costos promedios queda como:

$$\frac{C}{Q} = Q^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}\left[A^{-\frac{1}{\epsilon}} w^{\frac{\beta}{\epsilon}} r^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\frac{\epsilon}{\beta}\right]$$

y la de costos marginales:

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{1}{\epsilon}Q^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}\left[A^{-\frac{1}{\epsilon}} w^{\frac{\beta}{\epsilon}} r^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\frac{\epsilon}{\beta}\right]$$

Consideraciones adicionales sobre la teoría aditiva de los precios

Según la teoría marshalliana de precios, la ganancia de los empresarios es un residual de los ingresos sobre los costos de producción. Esto es $\pi = IT(Q) - CT(Q)$. Si representamos la función de producción por medio de una función Cobb-Douglas, y planteamos que los costos totales surgen por el pago de los recursos productivos (capital y trabajo), entonces podemos escribir:

$$\pi = pQ - (wL + rK) = pAK^{\alpha}L^{\beta} - (wL + rK)$$

La condición necesaria para maximizar esta función, por medio del diferencial es:

$$d\pi = \left(p\alpha\frac{Q}{K} - r\right) dK + \left(p\beta\frac{Q}{L} - w\right) dL = 0$$

Dado que no se considera una situación en la cual dK y dL sean cero, entonces

$$\left(p\alpha\frac{Q}{K} - r\right) ; \left(p\beta\frac{Q}{L} - w\right) = 0$$

por lo que $p\alpha\frac{Q}{K} = r$ y $p\beta\frac{Q}{L} = w$. Esto se puede interpretar como que el valor de mercado de las productividades físicas marginales es igual al pago total de los respectivos recursos productivos. No obstante sabemos que esto es cierto si la función de producción es homogénea de primer grado; esto es, exhibe rendimientos constantes de escala.

Con este resultado podemos escribir entonces $\pi = pQ - p(\alpha + \beta)Q = (1 - [\alpha + \beta])pQ$. Con lo que podemos entonces notar que solamente en el caso en que se ***asuman*** rendimientos constantes de escala podemos satisfacer las condiciones necesarias para garantizar un óptimo de ganancias, en cuyo caso estas serán iguales a **cero**. De planter la mera posibilidad de la existencia de rendimientos variables de escala (crecientes o decrecientes) entonces no podríamos satisfacer esta condición, además de que, para el caso de los rendimientos *crecientes* de escala, las ganancias serían *negativas*, mientras que para los rendimientos *decrecientes* de escala las ganancias resultarían *positivas*. Estos resultados, claro está, se basan en el supuesto de que a los recursos productivos se les compense por el valor en el mercado de su productividad (física) marginal.

Elasticidad de Sustitución

La elasticidad de sustitución mide la sensitividad del cambio en la utilización relativa de insumos ante un cambio en sus precios. Esta relación (σ) se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}{\frac{dK}{dL}}} = \frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d\left(\frac{w}{r}\right)}{\frac{w}{r}}} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{w}{r}\right)} \cdot \frac{\frac{w}{r}}{\frac{K}{L}}$$

Si notamos que, de nuestras ecuaciones de productividad marginal:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} = -\frac{w}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{K}{L} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{r}$$

Re escribiendo la ecuación de la elasticidad de sustitución haciendo uso de las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{w}{r}\right)} \cdot \frac{\frac{w}{r}}{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{r}} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{w}{r}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

De esta forma tenemos que la elasticidad de sustitición de la función de producción es constante e igual a uno (1) ***independientemente*** del valor de α+ß.

Funciones de Producción de *Elasticidad de Sustitución Constante (CES)*

$$Q = A\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{n}{\rho}} \qquad \{A>0\ ;\ 0 \leq \delta \leq 1\ ;\ -1<\rho \neq 0\}$$

donde δ es una variable distributiva , ρ es un parámeto determinante del grado de sustitución, y *n* representa la escala de producción.

Funciones Marginales

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial Q}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial K}$$

$$U = \left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = -\frac{1}{\rho}A\left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1} (-\rho)(\delta)K^{-\rho-1}$$

$$= \delta\,\frac{A^{1+\rho}}{A^{\rho}}\left[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{(1+\rho)}{\rho}} K^{-(1+\rho)}$$

$$= \frac{(\delta)}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+\rho} > 0$$

Por analogía:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{(1 - \delta)}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{(1+\rho)}$$

Sabemos ya que la pendiente de las isocuantas está dada por la razón entre las productividades marginales, por lo que, para la función **CES**:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = -\frac{\frac{(1-\delta)}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{L}\right)^{(1+\rho)}}{\frac{\delta}{A^{\rho}}\left(\frac{Q}{K}\right)^{(1+\rho)}}$$

$$= -\frac{(1-\delta)}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{(1+\rho)}$$

Elasticidad de Sustitución

$$\epsilon_{K,L} = \frac{\dfrac{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}{\left(\dfrac{K}{L}\right)}}{\dfrac{d\left(\dfrac{w}{w}\right)}{\left(\dfrac{w}{r}\right)}} = \frac{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}{d\left(\dfrac{w}{r}\right)}\ \frac{\left(\dfrac{w}{r}\right)}{\left(\dfrac{K}{L}\right)}$$

Acordándonos que en el óptimo la pendiente de la isocuanta es igual a la pendiente de la restricción presupuestaria:

$$\frac{(1-\delta)}{\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{(1+\rho)} = \frac{w}{r}$$

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\left(\frac{1}{1+\rho}\right)}\left(\frac{w}{r}\right)^{\left(\frac{1}{1+\rho}\right)}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\left(\dfrac{K}{L}\right)}{d\left(\dfrac{w}{r}\right)} = \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{w}{r}\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}}$$

De modo que, sustituyendo estos resultados en la ecuación de la elasticidad de sustitución de la función CES, tenemos:

$$\epsilon_{K,L} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{w}{r}\right)} \frac{\left(\frac{w}{r}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}$$

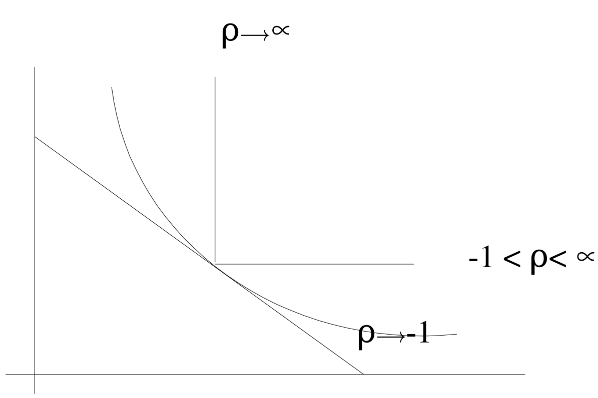
$$= \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{w}{r}\right)^{-\frac{\rho}{1+\rho}} \left(\frac{\frac{w}{r}}{\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{-\rho+1+\rho}{1+\rho}}}{\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}}\right)$$

$$\epsilon_{K,L} = \frac{1}{1+\rho}$$

En resumen, la eslasticidad de sustitución de la función **CES**, es una constante distinta de 1. Claro está, podemos observar que,

(i)	si $\rho \rightarrow \infty \therefore \epsilon_{K,L} \rightarrow 0$	Leontief
(ii)	si $\rho \rightarrow -1 \therefore \epsilon_{K,L} \rightarrow \infty$	Isocuanta lineal (con pendiente negativa)
(iii)	si $\rho \rightarrow 0 \therefore \epsilon_{K,L} \rightarrow 1$	Cobb-Douglas
(iv)	si $-1 < \rho < \infty \therefore \epsilon_{K,L} \rightarrow 0$	**CES**



Lecturas sugeridas:

Arrow, K., H. B. Chenery, B. S. Minhas and R. M. Solow [1961] *Capital and labor substitution and economic efficiency*, **Review of Economics and Statistics**, Vol. XLIII, pp. 225-234

Douglas, Paul H. & Charles Cobb [1926-27] **"A Theory of Production"**, **American Economic Review Papers and Proceedings** (Supplement), Vol. 39-40 (1926-27), pp. 139-165.

Ferguson, C. E. [1969] **The Neoclassical Theory of Production and Distribution**, Cambridge University Press.

Heathfield, David F. & Sören Wibe [1987] **An Introduction to Cost and Production Functions**, Macmillan Educacion, London

Meade, J. E. [1961] **A Neoclassical Theory of Economic Growth**, Allen & Unwin, London.

Nicholson, Walter [1998] **Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions**, Dryden Press, New York

Pasinetti, Luigi L. [1981] **Structural Change and Economic Growth**, Cambridge University Press.

Pasinetti, Luigi L. [1977] **Lectures on the Theory of Production**, Macmillan.

Pasinetti, Luigi L. [1977] **"On 'Non-substitution' in Production Models"**, **Cambridge Journal of Economics**, Vol. 1, 1977, pp. 389-394.

Robinson, Joan V. [1953-54] **"The Production Function and the Theory of Capital"**, **Review of Economic Studies**, Vol. 21, 1953-54, pp. 81-106.

Robinson, Joan V. [1955-56] **"The Production Function and the Theory of Capital: A Reply"**, **Review of Economic Studies**, Vol. 23, 1955-56

Robinson, Joan V. [1956] **The Accumulation of Capital**, Macmillan, London.

Roncaglia, A. [1978] **Sraffa and the Theory of Prices**, John Wiley & Sons.

Samuelson, Paul A. [1962] **"Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function"**, **Review of Economic Studies**, Vol. 39, 1962, pp. 193-206.

Samuelson, Paul A. [1966] **"A Summing Up"**, **Quarterly Journal of Economics**, Vol. 80, 1966, pp. 568-583.

Solow, Robert M. [1955-56] **"The Production Function and the Theory of Capital"**, **Review of Economic Studies**, Vol. 23, 1955-56, pp. 101-108.

Solow, Robert M. [1956] **"A Contribution to the Theory of Economic Growth"**, **Quarterly Journal of Economics**, February 1956, pp. 65-94.

Solow, Robert M. [1957] **"Technical Change and the Aggregate Production Function"**, **Review of Economics and Statistics**, Vol. 39, 1957, pp. 312-320.

Solow, Robert M. [1970] **Growth Theory: An Exposition**, The Radcliffe Lectures Delivered at the University of Warwick, 1969, Clarendon Press, Oxford

Sraffa, Piero [1926] **"The Laws of Returns under Competitive Conditions"** **Economic Journal**, Vol. XXVI, No. 144, pp. 535-550

Sraffa, Piero [1960] **Production of Commodities by Means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory**, Cambridge University Press.

Varian, Hal [1996] **Intermediate Microeconomics** (4th Edition) W.W. Norton & Co., New York

Varian, Hal [1992] **Microeconomic Analysis** (3rd Edition) W.W. Norton & Co., New York